

Programme de colles : Colles 11 et 12

semaines du 3 janvier au 14 janvier

Révisions de première année :

Probabilités de première année.

Chapitre 3 : Généralités sur les probabilités

Le cadre d'étude de première année est élargi à des univers Ω pouvant être infinis.

I-Le langage des probabilités

1-Espace probabilisable, événements

Définitions (*univers, événement certain, impossible, élémentaire, événements incompatibles, événement contraire, système complet d'événements*), exemples. La notion de σ -algèbre est hors-programme.

2-Espace probabilisé, probabilité

La notion de σ -additivité **est** au programme.

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$, propriétés : $P(\emptyset) = 0$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ avec preuves, et $P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ (admis).

Définitions : *événements presque-impossibles, presque-certains, presque-égaux, presque-disjoints, équiprobables*.

La notion du "presque-sûrement" est hors programme mais il est bon que les élèves sachent qu'un événement de probabilité nulle peut être différent de l'événement impossible.

Formule du crible : non démontrée, sera détaillée en TD.

II-Probabilités conditionnelles

1-Définition

Définition-théorème : $P_A(\cdot)$ est "bien" une probabilité.

Propriétés : calcul de $P(\cap_{i=1}^n A_i)$.

avec preuves.

2-Formule des probabilités totales

avec preuves, et conséquence : formule de Bayes.

III-Indépendance

1-Indépendance deux à deux

2-Indépendance mutuelle

L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fautive, exemple.

IV-Généralités sur les variables aléatoires

Chapitre 4 : Variables aléatoires discrètes

I-Définitions

X est discrète si $X(\Omega)$ est discret.

Définition de la loi d'une v.a. discrète.

II-Espérance, variance, moments

1-Espérance

Condition d'existence ($E(X)$ existe ssi $E(|X|)$ existe.) et expression.

Propriétés avec preuves.

Espérance de $\varphi(X)$ si φ est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Preuve dans le cas où φ est bijective.

2- Variance

Condition d'existence, expression, propriétés avec preuves.

Formule de Huyghens.

3- Moments d'ordre k

Définitions des moments et des moments centrés, propriétés admises.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour le moment on démontrée.

III-Lois discrètes

Pour chaque loi, on donne la fonction de répartition (et on la représente), l'espérance et la variance, avec les preuves.

1-Loi uniforme

2-Loi de Bernoulli

3-Loi binômiale

4-Loi hypergéométrique

Remarque : seule l'espérance de cette loi est à connaître (mais on a fait aussi la variance)

Convergence vers la loi binômiale avec preuve.

5-Loi de Poisson

Convergence de la loi binômiale vers la loi de Poisson avec preuve.

6-Lois géométriques

Les valeurs de l'espérance et de la variance ont été données, mais n'ont pas été démontrées encore.

Prochain programme : variables aléatoires discètes et couples de variables aléatoires discrètes.